ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

....

Nguyễn Thị Tuyết Mai

XẤP XỈ DIOPHANTINE VÀ PHÂN SỐ LIÊN TỤC TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH PELL

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

....

Nguyễn Thị Tuyết Mai

XẤP XỈ DIOPHANTINE VÀ PHÂN SỐ LIÊN TỤC TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH PELL

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN ĐÌNH BÌNH

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Được sự phân công của khoa Toán- Tin, trường Đại học Khoa Học Thái Nguyên và sự đồng ý của thầy giáo hướng dẫn TS. Nguyễn Đình Bình, tôi đã thực hiện đề tài "Xấp xỉ Diophantine và phân số liên tục trong giải phương trình Pell".

Để hoàn thành luận này, tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu, khoa Toán - Tin và phòng đào tạo của trường Đại học Khoa Học Thái Nguyên. Tôi xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo đã tận tình hướng dẫn, giảng dạy trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và rèn luyện ở trường Đại học Khoa Học Thái Nguyên.

Xin chân thành cảm ơn thầy giáo hướng dẫn TS. Nguyễn Đình Bình đã tận tình, chu đáo hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn này. Dù rất bận rộn trong công việc, song thầy vẫn dành nhiều thời gian và tâm huyết hướng dẫn, động viên, khuyến khích tôi trong quá trình nghiên cứu đề tài.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn đến gia đình, bạn bè, những người không ngừng động viên, hỗ trợ tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm ...

Tác giả

Nguyễn Thị Tuyết Mai

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong lịch sử phát triển của Số học, phương trình Pell được biết đến là một phương trình nổi tiếng trong dạng toán về phương trình nghiệm nguyên. Phương trình Pell được phát minh cách đây 1000 năm ở Ấn Độ cổ đại bởi Brahmaguta. Trong nhiều năm sau đó, các nhà toán học bắt đầu nghiên cứu tìm lời giải cho phương trình này. Đến năm 1770, Lagrange đã phát triển lí thuyết tổng quát về phương trình dựa trên phân số liên tục. Bên cạnh đó, các nhà toán học lớn như Legendre(1798), É. Borel(1903) cũng quan tâm nghiên cứu và có nhiều đóng góp cho việc hoàn thiện và phát triển phương trình Pell. Ngày nay rất nhiều tài liệu nghiên cứu sâu về phương trình Pell ra đời như: Computational aspects of number theory(H. Cohen, 2001), The higher arithmetic (H. Davenport, 2008), Solving the Pell equation (M.J.Jacobson, Jr and H.C.Williams, 2009) tham khảo trong tài liệu [4]. Tuy có rất nhiều công trình nghiên cứu về phương trình Pell cũng như phương trình nghiệm nguyên, song đó vẫn còn là một ẩn số thách thức các nhà toán học cũng như các bạn trẻ yêu thích môn toán.

Có thể nói, phương trình Pell khá phong phú và đa dạng về lịch sử ra đời, định nghĩa, trong phương pháp giải và cả ứng dụng của nó trong Số học. Bản thân nó đóng góp nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán về Số học hay và khó. Nhiều bài toán về phương trình Pell qua các kì thi Olimpic toán quốc tế, khu vực và trong nước ngày càng mới lạ thu hút sự quan tâm cũng như thách thức trí tuệ, sáng tạo của mỗi bạn trẻ. Và để giải nó không những cần nắm được lí thuyết mà còn cần các kĩ năng. Tuy nhiên hiện nay các bạn học sinh, đặc biệt là các bạn học sinh lớp chuyên, lớp chọn còn biết rất ít về dạng phương trình Pell. Đặc biệt, chúng ta có rất ít sách về phương trình Pell và ứng dụng của nó, chủ yếu là tham khảo các tài liệu, bài báo nước ngoài.

Do vậy, dưới sự góp ý của thầy hướng dẫn TS. Nguyễn Đình Bình, tác giả chọn đề tài "Xấp xỉ Diophantine và phân số liên tục trong giải phương trình Pell". Do phương trình Pell không còn là đề tài mới nên trong luận văn tác giả sẽ trình bày ngắn gọn các kết quả và ví dụ về phương trình Pell cơ bản, xấp xỉ Diophantine và phân số liên tục trong giải phương trình Pell. Đồng thời luận văn cũng phân tích mở rộng phương trình và ứng dụng của nó. Do thời gian có hạn và trình độ còn hạn chế nên luận văn chỉ dừng lại ở việc trình bày kết quả nghiên cứu về xấp xỉ Diophantine và phân số liên tục trong giải phương trình Pell, giới thiệu ứng dụng giải phương trình Pell âm.

2. Mục tiêu nghiên cứu của luận văn

Mục tiêu của luận văn là nghiên cứu về phương trình Pell cơ bản, nghiên cứu xấp xỉ Diophantine, phân số liên tục trong giải phương trình Pell. Đồng thời luận văn cũng phân tích mở rộng của phương trình Pell và ứng ụng của nó.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Đối tượng nghiên cứu của luận văn là phương trình Pell.
- Phạm vi nghiên cứu của luận văn là giới thiệu xấp xỉ Diophantine và phân số liên tục trong giải phương trình Pell, ứng dụng giải phương trình Pell âm.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Đọc sách liên quan đến đề tài và tìm kiếm tài liệu.
- Đọc, hiểu và dịch tài liệu từ tiếng Anh sang tiếng Việt.
- Sử dụng phương pháp tổng quát để hệ thống và trình bày các kết quả chính trong các tài liệu tham khảo.

5. Bố cục luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung của luận văn chia thành 2 chương:

- Chương 1 trình bày một số khái niệm và kết quả của phương trình Pell cơ bản, hệ thống lí thuyết về phân số liên tục.
- Chương 2 trình bày về xấp xỉ Diophantine, phân số liên tục đơn giản trong giải phương trình Pell và ứng dụng trong giải phương trình Pell. Chương 2 là chương trọng tâm của luận văn.

Chương 1

PHƯƠNG TRÌNH PELL

Trong chương này tác giả sẽ trình bày một số khái niệm và kết quả về phương trình Pell cơ bản, phân số liên tục. Đồng thời tác giả trình bày một số bài tập ứng dụng là các bài toán trong các kì thi học sinh giỏi các năm được chọn lọc. Nội dung chính được tham khảo từ các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [4].

1.1. Một số khái niệm và kết quả về phương trình Pell

Trong mục này, tác giả sẽ đưa ra hệ thống các định nghĩa và định lí về công thức nghiệm của phương trình Pell cơ bản, cùng một số ví dụ có kèm lời giải cho từng loại phương trình Pell. Nội dung chính được tham khảo trong tài liệu [1], [3].

1.1.1. Phương trình Pell Loại I

Phương trình Pell loại I là phương trình có dạng:

$$x^2 - Dy^2 = 1, (\text{ trong đó } D \text{ là số nguyên dương}). \tag{1.1}$$

Định lí 1.1.

1. Nếu D là số chính phương, $D = m^2, m \in \mathbb{Z}$ thì (1.1) không có nghiệm

nguyên dương.
2. Nếu D là số nguyên âm thì (1.1) không có nghiệm nguyên dương.
3. Phương trình (1.1) có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi D là số nguyên dương và không chính phương.

Định lí 1.2. Giả sử (a, b) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình $x^2 - Dy^2 = 1$ nghĩa là b là số nguyên bé nhất để $1 + Db^2$ là số chính phương. Xét dãy x_n và y_n cho bởi hệ thức truy hồi sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = a, x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n, n = 0, 1, ... \\ y_0 = 0, y_1 = b, y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n, n = 0, 1, ... \end{cases} \tag{1.2}$$

Khi đó (x_n, y_n) là tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Pell $x^2 - Dy^2 = 1$.

Định lí 1.3. Cho phương trình Pell $x^2 - Dy^2 = 1$. Gọi r là chu kì biểu diễn phân số liên tục $\sqrt{D}$, $\frac{p_k}{q_k}$ là phân số đơn giản thứ k của $\sqrt{D}$.
Nếu r chẵn thì tất cả các nghiệm của phương trình Pell là:

$$x = p_{kr-1}, y = q_{kr-1}.$$

Nếu r lẻ thì tất cả các nghiệm của phương trình Pell là:

$$x = p_{2tr-1}, y = q_{2tr-1}, t \in \mathbb{N}^*.$$

Lưu ý.
Nếu r là số chẵn thì (p_{r-1}, q_{r-1}) là nghiệm nhỏ nhất.
Nếu r là số lẻ thì (p_{2r-1}, q_{2r-1}) là nghiệm nhỏ nhất.

Ví dụ 1.1. Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^2 - 7y^2 = 1.$$

Lời giải. Ta có $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$. Chu kì $r = 4$ là số chẵn. Vậy ta có nghiệm nhỏ nhất là (8;3).